UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DISCIPLINA: MATA03 - CÁLCULO B

UNIDADE I - LISTA DE EXERCÍCIOS

Atualizada 2010.1

Áreas de figuras planas em coordenadas cartesianas

[1] Determine a área da região do plano limitada simultaneamente pelas seguintes curvas:

(1.1) $y = \ln x,\ x = 2$ e o eixo Ox

(1.2) $x = 8 + 2y - y^2,\ y = 1,\ y = 3$ e $x = 0$

(1.3) $xy = 4$ e $x + y = 5$

(1.4) $y = 2^x,\ y = 2x - x^2,\ x = 0$ e $x = 2$

(1.5) $y = 2x,\ y = 1$ e $y = \dfrac{2}{x}$

(1.6) $y = |x^2 - 4|$ e $y = 2$

(1.7) $y = x^3 - 3x$ e $y = 2x^2$

(1.8) $y = \dfrac{9}{x},\ y = 9x$ e $y = x$

(1.9) $f(x) = x|x|$ e $g(x) = x^3$

(1.10) $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$

Volumes por seções planas paralelas

[2] Utilizando seções planas paralelas, mostre que o volume de uma pirâmide quadrangular reta, com altura h e base quadrada de lado a, é igual a $\dfrac{a^2h}{3}$.

[3] Utilizando integral de seções planas paralelas, mostre que o volume do cone circular reto, de altura h e raio da base r, é igual a $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

[4] Calcule o volume do sólido que tem para base um círculo cujo raio mede 3 u. c. e cujas seções transversais a um diâmetro desta são quadrados, todos contidos em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como um dos lados cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

[5] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são triângulos retângulos isósceles, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como um dos seus catetos cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

[6] Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são semi-elipses, todas situadas em um mesmo

semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm o eixo menor como cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro e a medida do eixo maior igual ao dobro da medida do eixo menor. (Considere a área da elipse de semi-eixos maior e menor a e b, respectivamente, igual a πab).

[7] Calcule o volume de um sólido que tem para base uma elipse de semi-eixos medindo 2 cm e 3 cm e cujas seções transversais ao eixo maior são triângulos eqüiláteros, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem.

[8] Calcule o volume de um sólido que tem para base uma elipse de semi-eixo maior e menor a e b, respectivamente, e cujas seções transversais ao eixo maior são semi-círculos, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e tendo para diâmetros cordas da elipse da base, perpendiculares ao eixo maior. (Observe que esse volume é menor do que o volume do item anterior).

[9] Calcule uma expressão, em integrais, que represente o volume do sólido que tem para base a região do plano limitada pela parábola $P : x = y^2 - 1$ e a reta $r : x = y + 1$ e cujas seções transversais ao eixo Oy são triângulos retângulos isósceles, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e tais que as hipotenusas têm extremidades no contorno da base desse sólido e são perpendiculares ao eixo Oy.

Volumes de sólidos de revolução

[10] Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região do plano limitada pelo gráfico da função $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, com $x \in [-1, 1]$, e a reta $y = 0$, em torno do eixo Ox.

[11] Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região do plano limitada pelo gráfico da elipse $E : 9x^2 + y^2 = 9$ em torno do:

(11.1) Eixo maior (11.2) Eixo menor.

[12] Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região compreendida entre o(s) gráfico(s) de:

(12.1) $y = (x - 1)(x - 3)^2$ e o eixo x, ao redor do eixo Oy

(12.2) $y = \sqrt[3]{x}, x = 8$ e o eixo x, ao redor do eixo Ox

(12.3) $y = 2\sqrt{x - 1}$ e $y = x - 1$, ao redor da reta $x = 6$

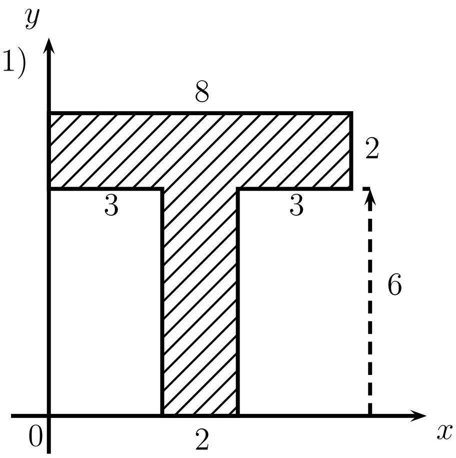
(12.4) $x = (y - 2)^2$ e $y = x$, ao redor da reta $y = 1$

(12.5) $y = \operatorname{sen} x$, para $0 \leq x \leq \pi$, ao redor do eixo Ox

Centróides de Regiões Planas em coordenadas cartesianas e o Segundo Teorema do Pappos-Guldin

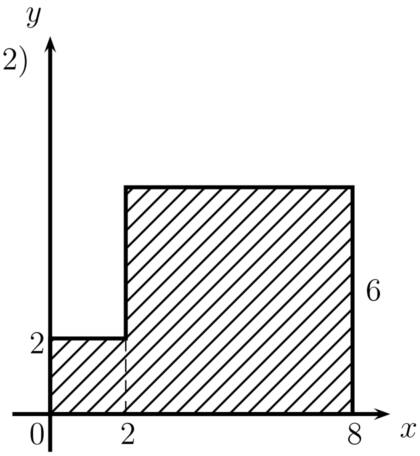
[13] Determine a posição do centróide das seguintes figuras e o volume do sólidos gerados pela rotação das mesmas em torno da reta indicada abaixo de cada figura:

(13.1)



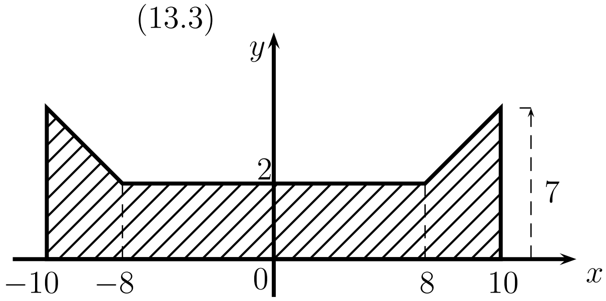
reta: $y = 10$

(13.2)



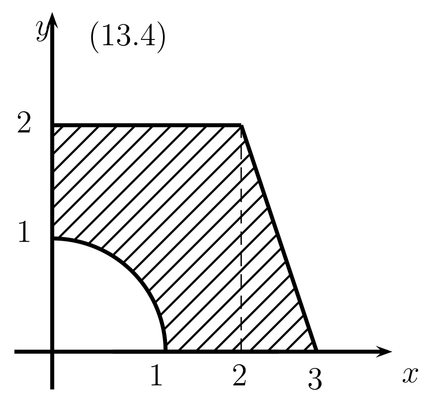
reta: $x - y + 4 = 0$

(13.3)



reta: $y - 7 = 0$

(13.4)



reta: $x - 4 = 0$

[14] Determine as coordenadas do centro de gravidade da região plana especificada:

(14.1) Região no primeiro quadrante, delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \ (x \geq 0, \ y \geq 0)$

(14.2) Área delimitada pela curva $y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$ e o eixo x

(14.3) Área delimitada pela parábola $y^2 = ax$ e pela reta $x = a$.

[15] Seja R a região do plano limitado pelas curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2$.

(15.1) Esboce R e calcule a sua área.

(15.2) Calcule o centróide de R.

(15.3) A região R é girado em torno da reta $x = 2$ formando um sólido D. Calcule o volume de D, usando o teorema de Pappus-Guldin.

[16] Seja R a região do plano limitado pelas curvas $y = -x^2 - 3x + 6$ e $x + y - 3 = 0$.

(16.1) Esboce R e calcule a sua área.

(16.2) Calcule o centróide de R.

(16.3) A região R é girado em torno da reta $x+y-3 = 0$ formando um sólido D. Calcule o volume de D, usando o teorema de Pappus-Guldin.

Comprimento de arco em coordenadas cartesianas e Áreas de Superfícies de Revolução

[17] Determinar o comprimento das curvas dadas em coordenadas retangulares:

(17.1) $y = \ln(1 - x^2)$ de $x = \dfrac{1}{4}$ a $x = \dfrac{3}{4}$.

(17.2) $y = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{8x^2}$ de $x = 1$ a $x = 2$.

(17.3) $y = 1 - \ln(\operatorname{sen} x)$ de $x = \dfrac{\pi}{6}$ a $x = \dfrac{\pi}{4}$.

(17.4) $(y-1)^2 = (x+1)^3$ de $x = 0$ a $x = 1$.

(17.5) $y = \dfrac{1}{2}\Big(e^x + e^{-x}\Big)$ de $x = 0$ a $x = 1$.

(17.6) $x = \dfrac{1}{3}y^3 + \dfrac{1}{4y}$ de $y = 1$ a $y = 3$.

[18] Calcule a área da supefície obtida pela rotação da curva:

(18.1) $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ ao redor do eixo Ox.

(18.2) $y = x^2,\ 1 \leq x \leq 2$ ao redor do eixo Oy.

(18.3) $y = e^x,\ 0 \leq x \leq 1$ ao redor do eixo Ox.

(18.4) $y = \sqrt{x},\ 4 \leq x \leq 9$ ao redor do eixo Ox.

(18.5) $x = \sqrt{4 - y^2},\ 0 \leq y \leq 1,$ ao redor do eixo Oy.

Curvas na forma paramétricas

[19] Esboçar os gráficos das seguintes curvas paramétricas. Eliminando t nas equações, achar as equações na forma cartesiana:

(19.1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ (19.2) $\begin{cases} x = t^5 - 4t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$ (19.3) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$ (19.4) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}$ $, t \geq 0.$

Derivadas de Funções dadas na forma paramétrica

[20] Calcule as expressões das derivadas e os seus respectivos valores nos pontos dados:

(20.1) $\begin{cases} x = \text{ sen } \; t \\ y = \text{ sen } \; 2t \end{cases}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{dy}{dx}$, no ponto $t = \frac{\pi}{6}$

(20.2) $\begin{cases} x = 6t(1+t^2)^{-1} \\ y = 6t^2(1+t^2)^{-1} \end{cases}$, $0 \le t \le 1$, $\frac{dy}{dx}$, no ponto de abscissa $\frac{12}{5}$

(20.3) $\begin{cases} x = t + \text{ sen } (\frac{\pi}{2}t) \\ y = t + \ln t \end{cases}$, $t > 0$, $\frac{dy}{dx}$, no ponto $t = 8$

[21] Calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$ nos seguintes casos:

(21.1) $\begin{cases} x = \text{ sen } t \\ y = \text{ sen } 2t \end{cases}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (21.2) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$

[22] Verifique se:

(22.1) $\begin{cases} x = \text{ sec } (t) \\ y = \ln \, (\, \cos t) \end{cases}$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, satisfaz a equação $\frac{d^2y}{dx^2} + e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

(22.2) $\begin{cases} x = \text{ arcsen}(t) \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$, $t \in [-1, 1]$, satisfaz a equação $\text{sen } x \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ - $y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

[23] Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da curva C, no ponto de abscissa $x_0 = -\frac{1}{4}$, sendo C, definida parametricamente pelas equações

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \text{ sen }^3 t \end{cases}, \; t \in [0, \pi].$$

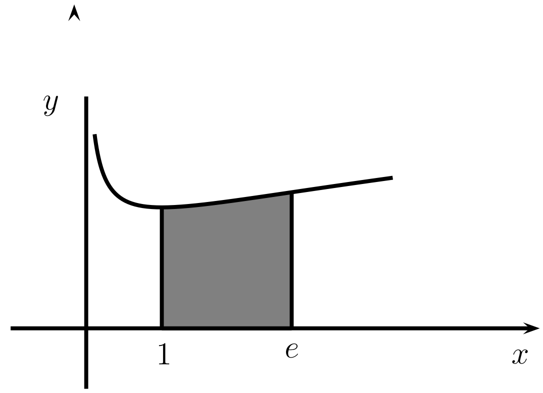
[24] Determine as equações das retas tangentes e normal ao gráfico da curva C, no ponto com $t = 1$, sendo C, definida parametricamente pelas equações

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \text{ arctg}(t) \end{cases}.$$

Áreas de regiões planas dadas por funções na forma paramétrica

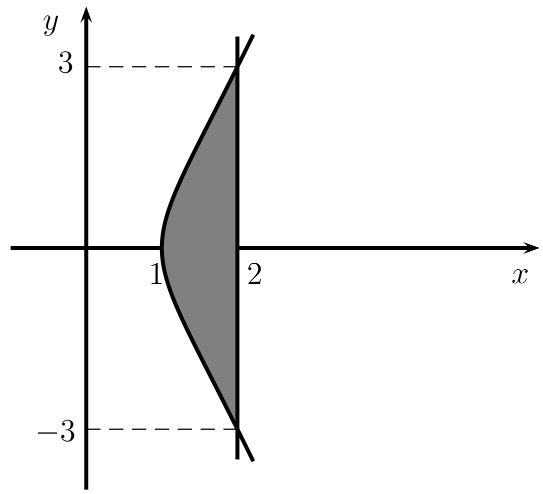
[25] Determine a área limitada:

(25.1) pelo eixo Ox, $x = 1$, $x = e$ e a curva de equações paramétricas $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 2 + t^2 \end{cases}$

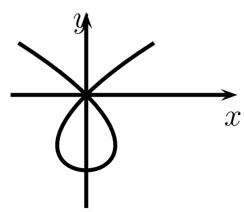


(25.2) pelas curvas de equações $x = 2$ e

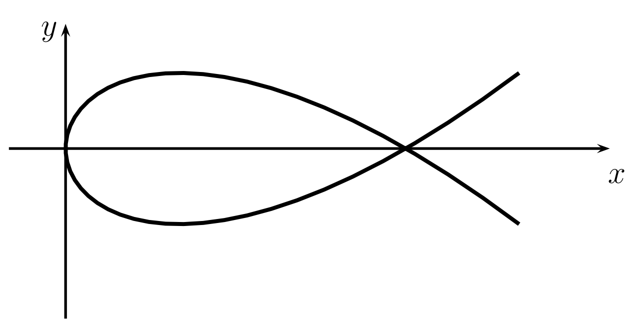
$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$$



(25.3) pelo laço de curva $\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$



(25.4) pelo laço de curva $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$



[26] Seja R a região do plano acima da reta $y = 2$ e abaixo do arco da ciclóide de equações

$$\begin{cases} x(t) = 2(t - \operatorname{sen} t) \\ y(t) = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$$ Esboce R e calcule a sua área.

Comprimento do arco de uma função na forma paramétrica

[27] Calcule os comprimentos das curvas descritas abaixo:

(27.1) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$

(27.2) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \ln t \end{cases}, 1 \le t \le 2$

(27.3) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi, \ a > 0$

(27.4) $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = 0 \end{cases}, 0 \le t \le 1$

(27.5) $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$

(27.6) $\begin{cases} x = e^t \operatorname{sen} t \\ y = e^t \cos t \end{cases}, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

[28] As equações $\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$ dão a posição (x, y) de uma partícula no instante t. Determine a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $0 \le t \le 5$.

[29] Determine o comprimento de arco do laço de curva do exercício (25.4).

Área de superfície de rotação

[30] Encontre a área da superfície obtida pela rotação da curva em torno do eixo indicado.

(30.1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}, 0 \le t \le 4$, eixo Ox

(30.2) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a sen^3 t \end{cases}, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, a. > 0, eixo Ox

(30.3) $\begin{cases} x = e^t sen t \\ y = e^t \cos t \end{cases}, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, eixo Oy

Respostas

[1] $\begin{cases} (1.1)\ [2\ln 2 - 1]\text{u.a} & (1.2)\ \dfrac{46}{3}\text{u.a} & (1.3)\ \Big[\dfrac{15}{2} - 8\ln 2\Big]\text{u.a} \\ (1.4)\ \Big[\frac{3}{\ln 2} - \dfrac{4}{3}\Big]\text{u.a} & (1.5)\ \Big[\dfrac{-3}{4} + 2\ln 2\Big]\text{u.a} & (1.6)\ \Big[\dfrac{16\sqrt{2} + 24\sqrt{6} - 64}{3}\Big]\text{u.a} \\ (1.7)\ \frac{71}{6}\text{u.a} & (1.8)\ 18\ln 3\ \text{u.a} & (1.9)\ \dfrac{1}{6}\text{u.a} \\ (1.10)\ \dfrac{64}{3}\text{u.a} \end{cases}$

[4] $V = 144$ u.v [5] $V = \dfrac{8r^3}{3}$ [6] $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$ [7] $V = 16\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ [8] $V = \dfrac{2\pi ab^2}{3}$

[9] $V = \displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{(2 + y - y^2)^2}{4}\, dy = \frac{81}{40}$ u.v [10] $V = \dfrac{\pi(e^4 + 4e^2 - 1)}{4e^2}$ u.v

[11] $\begin{cases} (11.1)\ V = 4\pi\ \text{u.v} & (11.2)\ V = 12\pi\ \text{u.v} \end{cases}$

[12] $\begin{cases} (12.1)\ V = \dfrac{24\pi}{5}\ \text{u.v} & (12.2)\ V = \dfrac{96\pi}{5}\ \text{u.v} & (12.3)\ V = \dfrac{272\pi}{15}\ \text{u.v} \\ (12.4)\ V = \dfrac{27\pi}{2}\ \text{u.v} & (12.5)\ V = \dfrac{\pi^2}{2}\ \text{u.v} \end{cases}$

[13] $\begin{cases} (13.1)\ \Big(4,\ \dfrac{37}{7}\Big);\ V = 264\pi u.v & (13.2)\ \Big(\dfrac{23}{5},\ \dfrac{14}{5}\Big);\ V = 232\sqrt{2}\pi u.v \\ (13.3)\ \Big(0,\ \dfrac{23}{15}\Big);\ V = \dfrac{1640}{3}\pi u.v & (13.4)\ \Big(\dfrac{24}{20 - \pi},\ \dfrac{52}{3(20 - \pi)}\Big);\ V = 2\pi(14 - \pi)u.v \end{cases}$

[14] $\begin{cases} (14.1)\ \Big(\dfrac{4a}{3\pi}, \dfrac{4b}{3\pi}\Big) & (14.2)\ \Big(0, \dfrac{8}{5}\Big) & (14.3)\ \Big(\dfrac{3a}{5}, 0\Big) \end{cases}$

[15] $\begin{cases} (15.1)\ A = \dfrac{8}{3}\ \text{u.a} & (15.2)\ (\bar{x},\ \bar{y}) = (0,\ 1) & (15.3)\ V = \dfrac{32\pi}{3}\ \text{u.v} \end{cases}$

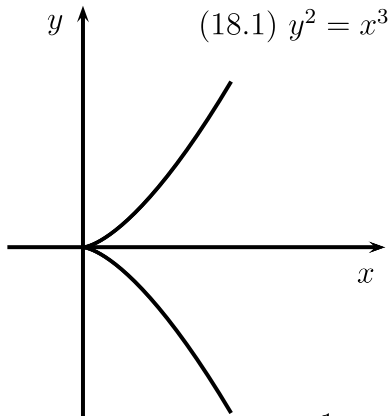
[16] $\begin{cases} (16.1)\ A = \dfrac{32}{3}\ \text{u.a} & (16.2)\ (\bar{x},\ \bar{y}) = \Big(-1,\ \dfrac{28}{5}\Big) & (16.3)\ V = \dfrac{256\sqrt{2}\pi}{15}\ \text{u.v} \end{cases}$

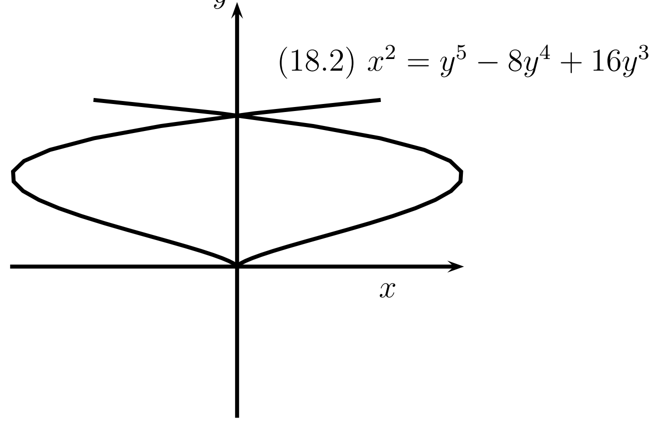
[17] $\begin{cases} (17.1)\ \ln\Big(\dfrac{21}{5}\Big) - \dfrac{1}{2}\ \text{u.c} & (17.2)\ \dfrac{123}{32}\ \text{u.c} & (17.3)\ \ln\Big|\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{3}}\Big|\ \text{u.c} \\ (17.4)\ \dfrac{1}{27}(22\sqrt{22} - 13\sqrt{13})\ \text{u.c} & (17.5)\ \dfrac{1}{2e}(e^2 - 1)\ \text{u.c} & (17.6)\ \dfrac{53}{6}\ \text{u.c} \end{cases}$

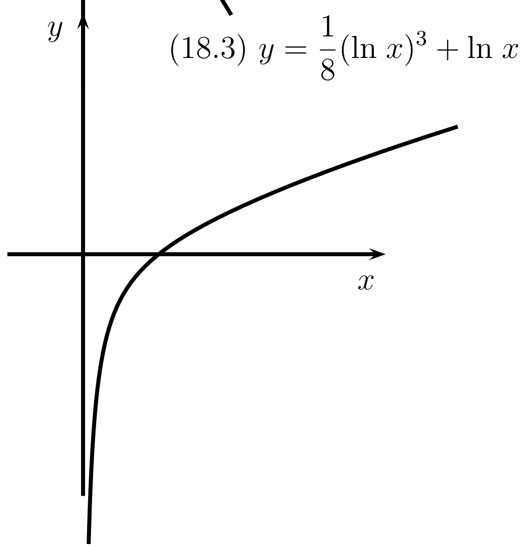
[18]

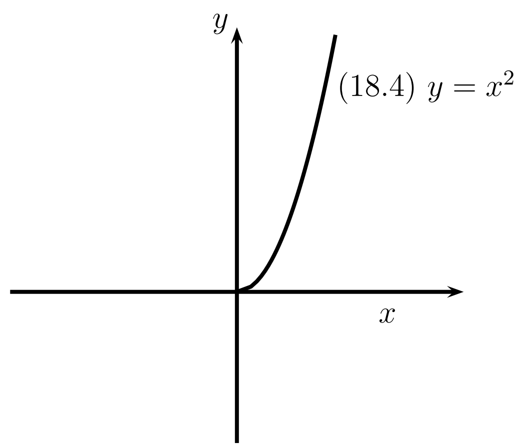
$\begin{cases} (18.1)\ 8\pi\text{u.a} \quad (18.2)\ \dfrac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})\ \text{u.a} \\ (18.3)\ \pi[e\sqrt{1 + e^2} + \ln(e + \sqrt{1 + e^2}) - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]\ \text{u.a} \\ (18.4)\ \pi(37\sqrt{37} - 17\sqrt{17})/6\ \text{u.a} \quad (18.5)\ 4\pi\ \text{u.a} \end{cases}$

[19]









[20] (20.1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2cos(2t)}{cos(t)}, \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{6}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(20.2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t}{1-t^2}$; para $x = \dfrac{12}{5}$, temos $t = \dfrac{1}{2}$, logo $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3}$

(20.3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+t}{t} \cdot \dfrac{1}{1 + (\pi/2)cos(\frac{\pi}{2}t)}, \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=8} = \dfrac{9}{8+4\pi}$

[21] (21.1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2\cos(2t).\operatorname{sen}(t) - 4.\operatorname{sen}(2t).\cos(t)}{\cos^3(t)}$ (21.2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 12e^{5t}$

[23] $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

[24] Reta Tangente: $y - (1 + \frac{\pi}{2}) = 2(x - 1)$

Reta Normal: $y - (1 + \frac{\pi}{2}) = -1\dfrac{1}{2}(x - 1)$

[25] (25.1) $\dfrac{9e - 10}{4}$ u.a (25.2) $\dfrac{52}{15}$ u.a (25.3) $\dfrac{8}{15}$ u.a (25.4) $\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$ u.a

[26] $(2\pi + 8)$ u.a

[27] $\begin{cases} (27.1)\ 4\pi \text{ u.c} & (27.2)\ \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \ln\left|\dfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right| \text{ u.c} & (27.3)\ 6a \text{ u.c} \\ (27.4)\ \dfrac{1}{4} \text{ u.c} & (27.5)\ 8a \text{ u.c} & (27.6)\ \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1) \text{ u.c} \end{cases}$

[28] $10\sqrt{26} + 2\ln(5 + \sqrt{26})$ u.c   [29] $4\sqrt{3}$ u.c

[30] (30.1) $\dfrac{8\pi}{3}\left(17^{(3/2)} - 1\right)$ (30.2) $\dfrac{6}{5}\pi a^2$ (30.3) $\dfrac{2}{5}\sqrt{2}\pi\left(2e^{\pi} + 1\right)$