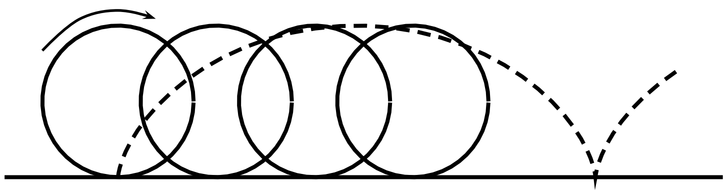
Chapter 2

Curvas Paramétricas

Introdução e Motivação:

No estudo de curvas cartesianas estamos acostumando a tomar uma variável como independente e a outra como dependente, ou seja $y = f(x)$ ou $x = h(y)$. Porem, alguns movimentos ou caminhos são inconveniente, difícil ou impossível de ser descrito por uma função de uma variável ou formula da forma $y = f(x)$.

- Por exemplo é impossível de descreve na forma $y = f(x)$, o ciclóide - trajetória de um ponto pertencente a um círculo de raio R posto a girar, sem deslizar, ao longo de uma reta situada num plano horizontal.



  Deduzimos a equação do ciclóide na proxima seção.

- Outro exemplo, suponhamos dois aviões com mesmo velocidade percorre caminhos retas de equações $y = 2x + 3$ e $y = 3x - 2$ respectivamente.Será eles vão colidir? Mesmo as retas interceptando no ponto $(5, 13)$, as equações não indicar que os aviões vão colidir.

Para resolve destes problemas, introduzimos **curvas paramétricas.** Em vez de definir y em termos de x ou x em termos de y definimos ambos x e y em termos de uma terceira variável chamado **parâmetro.**

2.1 Definição e Exemplos

2.1 Definição. *Sejam um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e funções contínuas $x(t)$ e $y(t)$ definidas em I.*

1) Dizemos que a função

$$\begin{array}{rccl} \lambda: & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & (x(t), y(t)) \end{array}$$

*é uma **curva parametrizada**.*

*2) O conjunto $C = \{(x(t), y(t));\ t \in I\}$ (imagem da função λ) é uma **curva**.*

3) As equações

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} ; t \in I$$

*são equações paramétricas da **curva** C. Dizemos também que essas equações parametrizam a **curva** C.*

O parâmetro t pode ser interpretado como tempo e $(x(t), y(t))$ nos dá a posição de um ponto no instante t, que se desloca no plano XOY. A curva C é a trajetória descrita pelo ponto. Assim como é possível fazer um percurso de várias maneiras (mais rápida ou mais devagar, num sentido ou no outro, etc) uma dada curva pode ter várias equações paramétricas.

Se o domínio do parâmetro é o intervalo fechado $[a, b]$, então $(x(a), y(a))$ é o ponto inicial da curva e $(x(b), y(b))$ é o ponto final da curva.

2.2 Observação. *O gráfico de qualquer função pode ser pensado como uma curva parametrizada. De fato, dado uma função $y = f(x)$, o gráfico de f consiste dos pontos $(x, f(x))$, onde x*

percorre os valores permitidas do domínio. Se definimos

$$\begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = f(t), \end{cases}$$

então plotando os pontos $P(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t))$ *da o gráfico de* f.

Exemplo **2.1.** *Considere a função* $y = x^2$ *no domínio* $-2 \leq x \leq 2$. *O gráfico da função como uma curva parametrizada é:*

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} ; -2 \leq t \leq 2.$$

Seja $P(t) = (t, t^2)$, *então* $P(-2) = (-2, 4)$, $P(1) = (1, 1)$ *assim por diante.*

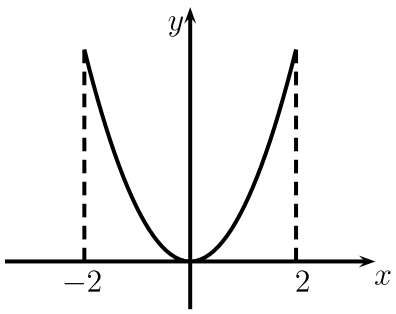
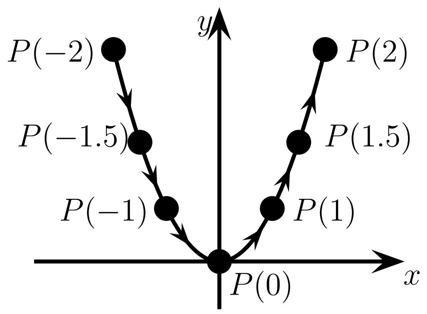


gráfico estático



movimento ao longo a curva

Exemplo **2.2.** *Determine equações paramétricas para a reta que liga* $P_0 = (x_0, y_0)$ *ao* $P_1 = (x_1, y_1)$.

Solução

Método I: A reta é o conjuntos de pontos $P = P(t) = (x(t), y(t))$ tais que $\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{P_0P_1}$, e portanto,

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} ; 0 \leq t \leq 1$$

representa a reta ligando P_0 ao P_1.

Método II: A equação cartesiana da reta que liga (x_0, y_0) ao (x_1, y_1) é dada por

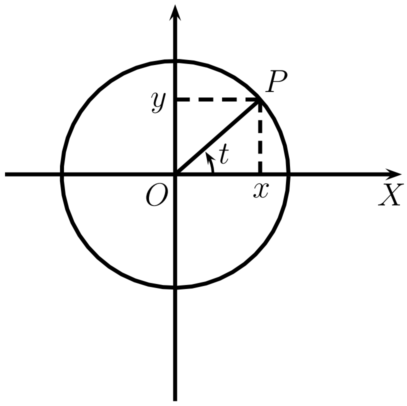
$$y = y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0), \ \ x_0 \leq x \leq x_1.$$

Logo, da observação 2.1.2, podemos parametrizar a reta por

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = y_0 + \left(\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(t - x_0) \end{cases} ; x_0 \leq t \leq x_1$$

Exemplo **2.3.** *Determine equações paramétricas para o círculo C_1 de raio 1 e centro na origem.*

Solução



Temos, $P = (x, y) \in C_1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Para cada ponto $P = (x, y) \in C_1$, tomemos o ângulo t entre OX e OP tal que $t \in [0, 2\pi]$.

Então

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases} ; t \in [0, 2\pi]$$

são equações paramétricas dessa curva.

Exemplo **2.4.** *Os dois pares de equações a seguir também parametrizam o círculo C_1 de raio 1 e centro na origem:*

$$i) \begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \operatorname{sen}(2t) \end{cases} ; t \in [0, \pi] \qquad ii) \begin{cases} x(t) = \cos(-t) \\ y(t) = \operatorname{sen}(-t) \end{cases} ; t \in [0, 2\pi]$$

Em i) o ponto se desloca mais rápido, percorre o círculo na metade do tempo, no sentido anti-horário. Em ii) o ponto se desloca mais devagar e em sentido horário.

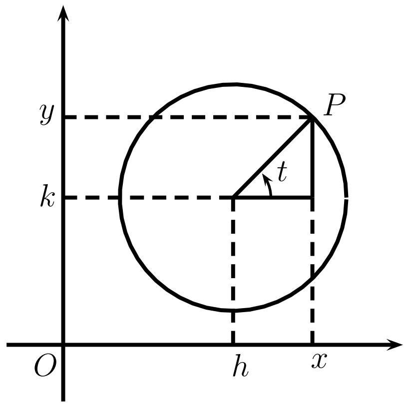
Exemplo **2.5.** *Dado o círculo C de raio $r > 0$ e centro no ponto (h, k) determine equações paramétricas para C.*

Solução

Temos, $P = (x, y) \in C \Leftrightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x-h}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{y-k}{r}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$Q = \left(\dfrac{x-h}{r}, \dfrac{y-k}{r}\right)$ pertence ao círculo C_1, dado anteriormente. Tomemos então



$$\begin{cases} \dfrac{x-h}{r} = \cos t \\ \dfrac{y-k}{r} = \operatorname{sen} t \end{cases} ; t \in [0, 2\pi]$$

Para cada ponto $P = (x, y) \in C$ temos

$$\begin{cases} x(t) = r \cos t + h \\ y(t) = r \operatorname{sen} t + k \end{cases} ; t \in [0, 2\pi]$$

que são equações paramétricas de C.

Exemplo **2.6.** *Seja a elipse E com centro no ponto (h, k), eixos paralelos aos eixos coordenadas e semi-eixos a e b. Determinar equações paramétricas para E.*

Solução

Temos $P = (x, y) \in E \Leftrightarrow \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y-k}{b}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Q = \left(\dfrac{x-h}{a}, \dfrac{y-k}{b}\right)$ pertence ao círculo C_1. Tomemos então

$$\begin{cases} \dfrac{x-h}{a} = \cos t \\ \dfrac{y-k}{b} = \operatorname{sen} t \end{cases} ; t \in [0, 2\pi]$$

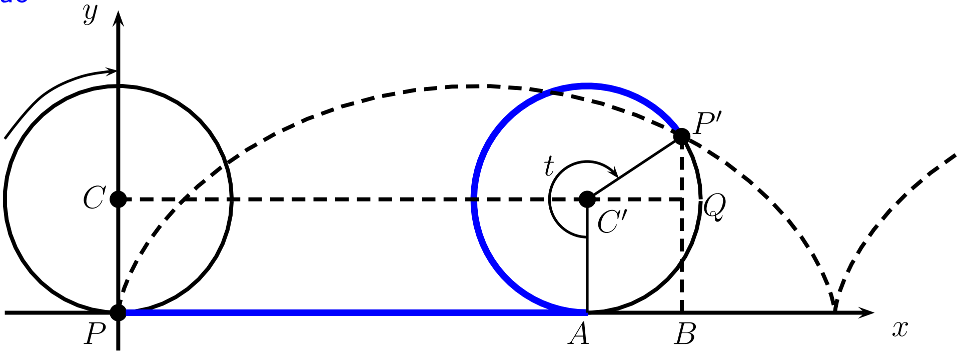
Para cada ponto $P = (x, y) \in E$ temos

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t + h \\ y(t) = b \operatorname{sen} t + k \end{cases} ; t \in [0, 2\pi]$$

que são equações paramétricas de E.

Exemplo **2.7.** *Determinar as equações paramétricas do ciclóide - trajetória descrita por um ponto P sobre uma circunferência de raio R que rola sem deslizar sobre o eixo x.*

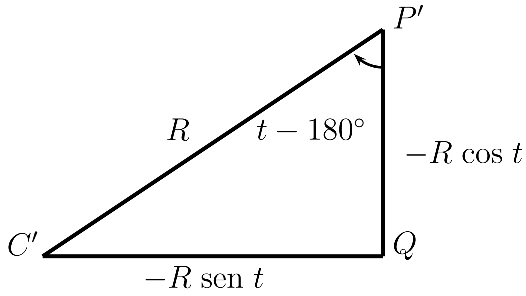
Solução



t é o ângulo varrido pelo raio CP quando o círculo rola para uma nova posição. O giro da circunferência implica que

o comprimento do segmento $PA=$ o comprimento do arco $P'A$, ou seja, $|OA| = Rt$.

Seja $P' = (x, y)$ e considere o triângulo $C'P'Q$:

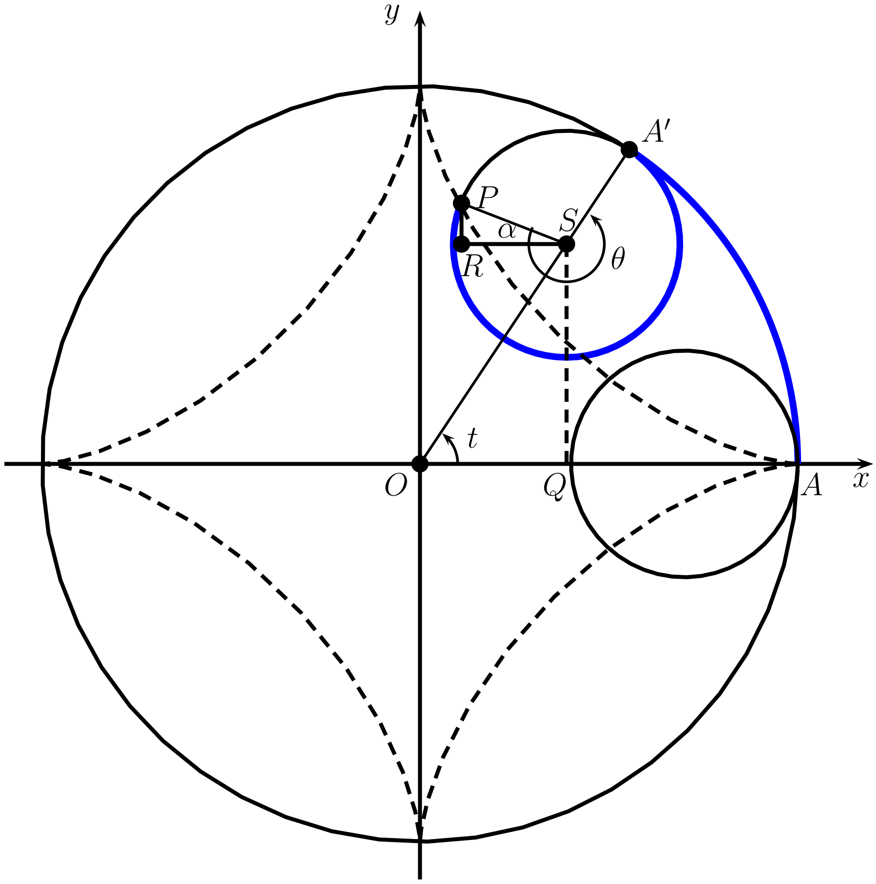


Logo as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = |PA| + |AB| = |PA| + |C'Q| = Rt - R \text{ sen } t = R(t - \text{ sen } t) \\ y = |QB| + |P'Q| = R - R\cos t = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

Exemplo **2.8.** *Determinar as equações paramétricas do astróide - trajetória descrita por um ponto P sobre uma circunferência de raio $R/4$ rolando sem deslizar ao longo de outro círculo de raio R.*

Solução



t é o ângulo varrido pelo raio OA quando o círculo rola para uma nova posição. O giro da circunferência implica que

o comprimento do arco AA'= o comprimento do arco PA',

ou seja, $Rt = \dfrac{R\theta}{4} \Rightarrow \theta = 4t$, onde θ é o ângulo $P\widehat{S}A'$.

Seja $P = (x, y)$ e considere o triângulo PSR, com ângulo $P\widehat{S}R = \alpha$. Então

$$\alpha = \theta - t - 180° = 3t - 180°.$$

As coordenadas do ponto P satisfazem as relações:

$$(1)\begin{cases} x = |OQ| - |RS| = \dfrac{3R}{4}\cos t - \dfrac{R}{4}\cos\alpha \\ \\ y = |SQ| + |PR| = \dfrac{3R}{4}\,\text{sen}\, t + \dfrac{R}{4}\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$$

Como $\alpha = 3t - 180°$, temos que

$$(2)\begin{cases} \cos\,(3t - 180°) = -\cos\,(3t) = 3\cos t - 4\cos^3 t \\ \operatorname{sen}\,(3t - 180°) = -\operatorname{sen}\,(3t) = 4\operatorname{sen}^3 t - 3\operatorname{sen} t \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1) temos

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$$

que são as equações paramétricas do astróide.

2.2 Construção de gráficos de curvas paramétricas

Neste seção, estudamos maneiras de esboçar gráficos de curvas paramétricas

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

- **MÉTODO I: Fazendo uma tabela**

  As vezes podemos esboçar o gráfico fazendo uma tabela escolhendo alguns valores de t. Neste método não é sempre aconselhável pois é difícil sabe até quantos valores de t podemos escolher para pode esboçar o gráfico perfeitamente.

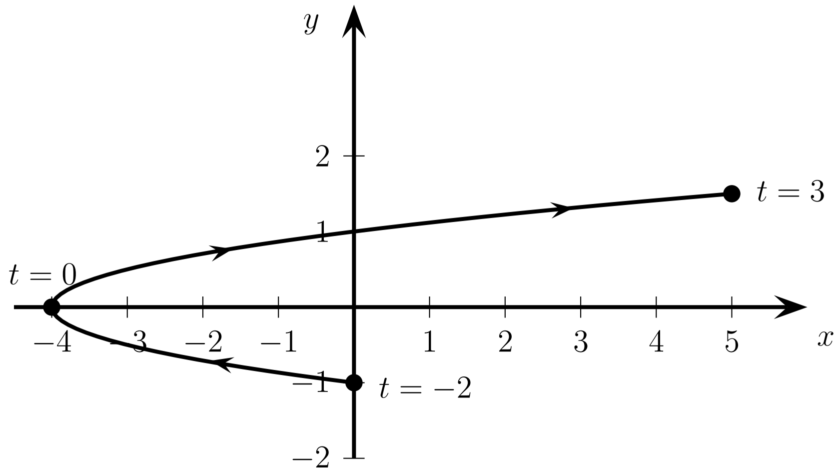
Exemplo **2.9.** *Esboçar a curva descrita pelas equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = t^2 - 4 \\ y = \dfrac{t}{2} \end{cases} \qquad -2 \leq t \leq 3$$

Solução

t	x	y
-2	0	-1
-1	-3	-0,5
0	-4	0
1	-3	0,5
2	0	1
3	5	1,5

■



- **MÉTODO II: Transformando a equação paramétrica para cartesiana**

  Podemos esboçar o gráfico de uma paramétrica transformando-la para cartesiana eliminando o parâmetro t entre as equações.

Exemplo **2.10.** *Ache a equação cartesiana da astróide*

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\,\mathrm{sen}^3 t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solução

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \Rightarrow \cos t = \left(\dfrac{x}{R}\right)^{1/3} \\ y = R\,\text{sen}^3 t \Rightarrow \text{sen}\, t = \left(\dfrac{y}{R}\right)^{1/3} \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} \cos^2 t + \text{sen}^2 t &= 1 \\ \Rightarrow \left(\frac{x}{R}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{R}\right)^{2/3} &= 1 \\ \Rightarrow x^{2/3} + y^{2/3} &= R^{2/3} \end{aligned}$$

que a equação cartesiana. ■

Exemplo **2.11.** *Eliminar o parâmetro t na seguinte equação paramétrica e esboçar seu gráfico*

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{t+1}} \\ y = \dfrac{t}{t+1} \end{cases} \quad t > -1$$

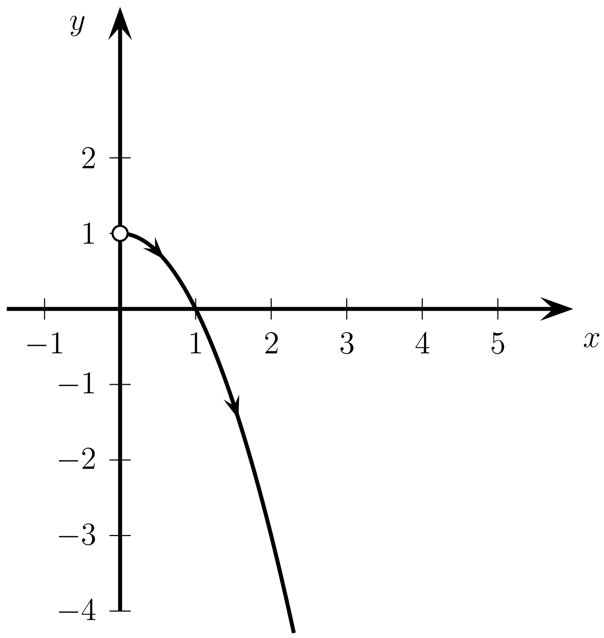
Solução

$y = \dfrac{t}{t+1} \Rightarrow t = \dfrac{y}{1-y}$

Substituindo em $x = \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$, temos

$$x = \sqrt{1-y} \quad \text{ou } y = 1 - x^2.$$

Ou seja o gráfico é parte do gráfico da parabola $y = 1 - x^2$, com $x > 0$ e $y < 1$.
■



Exemplo **2.12.** *Eliminar o parâmetro t na seguinte equação paramétrica e esboçar seu gráfico*

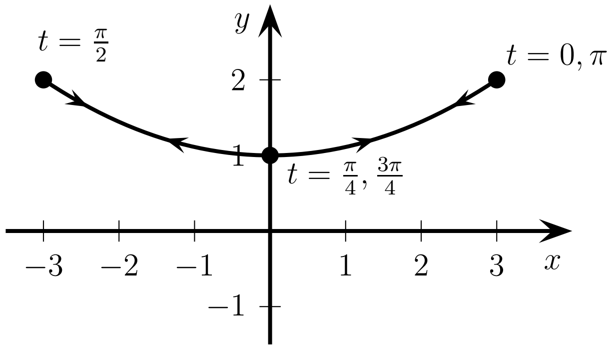
$$\begin{cases} x = 3\cos(2t) \\ y = 1 + 2\cos^2(2t) \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi$$

Solução

$x = 3\cos(2t) \Rightarrow \cos(2t) = \dfrac{x}{3}$

Substituindo em $y = 1+2\cos^2(2t)$, temos

$$y = 1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{9}.$$



Ou seja o gráfico é parte do gráfico da parabola

$$y = 1 + \frac{x^2}{9}$$

percorrida duas vezes, com

$-3 \le x \le 3$ e $1 \le y \le 2$.

■

- **MÉTODO III: Usando Noções de Calculo A**

a) Pontos de interseção com os eixos, caso existem,ou fácil de calcular

b) Pontos de auto-interseção - pontos por onde a curva passa duas vezes (ou seja em dois instantes diferentes), caso existem,

c) Os tangentes horizontais $\left(\dfrac{dy}{dt} = 0 \text{ e } \dfrac{dx}{dt} \neq 0\right)$ caso existem,

d) Os tangentes verticais $\left(\dfrac{dx}{dt} = 0 \text{ e } \dfrac{dy}{dt} \neq 0\right)$ caso existem,

e) Estudo de crescimento e decrescimento de x e y

Exemplo **2.13.** *Esboçar o gráfico de*

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = \dfrac{-t^3}{3} + t + 1 \end{cases}$$

Solução

– Interseção com os eixos:

$y = 0 \Rightarrow \dfrac{-t^3}{3} + t + 1 = 0$ que é difícil de resolver.

$x \neq 0 \ \forall t$, então a curva não intersecta o eixo y.

– Auto-Interseção:

Sejam $t_1 < t_2$ tais que $x(t_1) = x(t_2)$ e $y(t_1) = y(t_2)$.

$$x(t_1) = x(t_2) \Rightarrow (t_1)^2 + 1 = (t_2)^2 + 1 \Rightarrow t_1 = \pm t_2 \Rightarrow t_1 = -t_2.$$

$$\begin{cases} y(t_1) = y(t_2) \\ \quad \text{e} \\ t_1 = -t_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{(t_1)^3}{3} - t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \text{ ou } t_1 = \pm\sqrt{3}$$

$t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2$ (não serve!). Então $t_1 = -\sqrt{3}$ e $t_2 = \sqrt{3}$. Temos,

$$t = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

– Tangentes

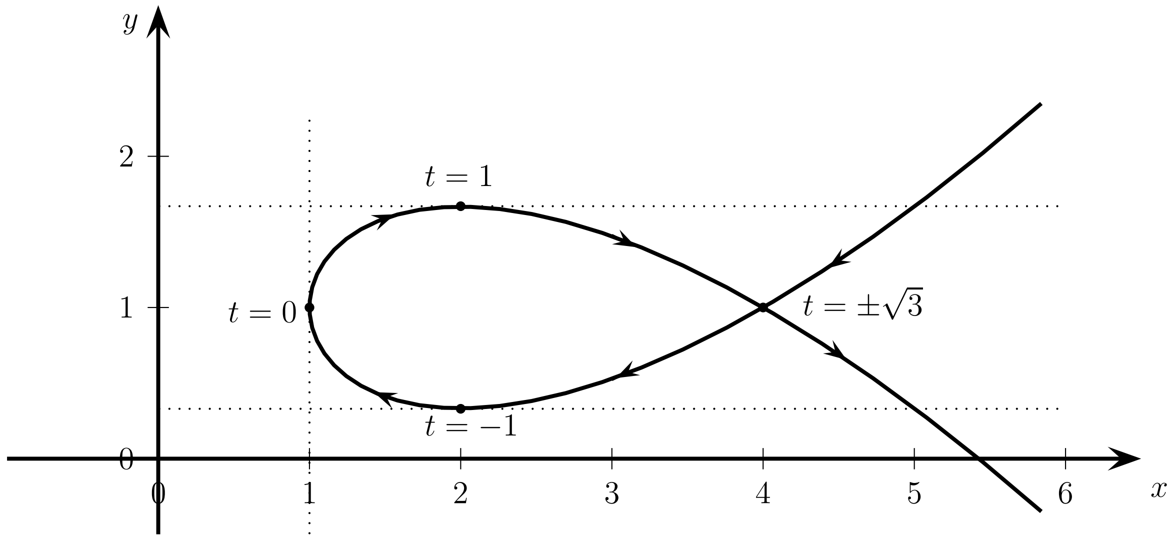
$\dfrac{dx}{dt} = 2t = 0 \Rightarrow t = 0$, ou seja a função tem uma reta tangente vertical no ponto $(1, 1)$.

$\dfrac{dy}{dt} = -t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \pm 1$, ou seja a função tem 2 retas tangentes horizontais nos pontos $(2, \frac{5}{3})$ e $(2, \frac{1}{3})$.

− Crescimento e decrescimento

sinal de $\dfrac{dx}{dt}$	− − − − −		+ + + + + + + + +		+ + + + + + +		− − − − − − −	t
crescimento de x	descrescente	-1	descrescente	0	crescente	1	crescente	

sinal de $\dfrac{dy}{dt}$	− − − − −		− − − − − − −		+ + + + + + +		+ + + + + +	t
crescimento de y	descrescente	-1	crescente	0	crescente	1	descrescente	



2.3 Exercícios

[1] Esboçar os gráficos das seguintes curvas paramétricas. Eliminando t nas equações, achar as equações na forma cartesiana:

(1.1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ (1.2) $\begin{cases} x = t^5 - 4t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$

(1.3) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$ (1.4) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}$, $t \geq 0$.

(1.5) $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = \dfrac{1}{2t - 1} \end{cases}$ (1.6) $\begin{cases} x = 2 \operatorname{cotg} \theta \\ y = 2 \operatorname{sen}^2\theta \end{cases}$

(1.7) $\begin{cases} x = t(t^2 - 2) \\ y = 2(t^2 - 1) \end{cases}$ (1.8) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3} \end{cases}$

2.4 Reta Tangentes de curvas Paramétricas

Neste seção queremos determinar a equação da reta tangente ao equações paramétricas dado por:

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \quad (*)$$

Recordamos que a equação da reta tangente ao $y = F(x)$ no ponto $(a, F(a))$ é dado por

$$y = F(a) + m(x-a), \quad \text{onde} \quad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = F'(a) \quad (**)$$

Então se podemos calcular $\frac{dy}{dx}$ para as equações paramétricas, podemos usar $(**)$ para achar a equação da reta tangente.

- Cálculo de $\frac{dy}{dx}$:

  Suponha que podemos eliminar o parâmetro t em $(*)$ e reescreve-lo na forma $y = F(x)$. Se substituirmos $x = f(t)$ e $y = g(t)$ na equação $y = F(x)$, obtermos

  $$g(t) = F(f(t))$$

  Derivando usando a Regra da Cadeia, temos

  $$g'(t) = F'(f'(t))$$

  Mudando a notação, temos que

  $$\frac{dy}{dt} = F'(x)\frac{dx}{dt}$$

  Resolvendo por $F(x) = \frac{dy}{dx}$ temos

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \text{desde que} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0}$$

Da mesma forma

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}, \quad \text{desde que} \quad \frac{dy}{dt} \neq 0}$$

Exemplo **2.14.** *Ache as retas tangentes ao curva paramétrica dada por*

$$\begin{cases} x = t^3 - 2t \\ y = 2t^2 - 2 \end{cases} \quad \textit{no ponto} \quad (0, 2).$$

Solução

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t}{3t^2 - 2}$$

Quando $x = 0, \ y = 2 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2}$

$$\text{Para} \quad t = -\sqrt{2} \quad , m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Então a reta tangente no ponto $(t = -\sqrt{2})$ é

$$y = 2 - \sqrt{2}x$$

$$\text{Para} \quad t = \sqrt{2} \quad , m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Então a reta tangente no ponto $(t = \sqrt{2})$ é

$$y = 2 + \sqrt{2}x$$

■

- Cálculo de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

  Para calcular a segunda derivada usamos a regra da cadeia duas vezes:

$$\boxed{\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}}$$

Exemplo **2.15.** *Calcule a segunda derivada da seguintes equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = t^3 - 2t \\ y = 2t^2 - 2 \end{cases} \quad \textit{no ponto} \quad (0,2)$$

e diga se ela tem concavidade voltada para baixo ou para cima neste ponto.

Solução

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{4t}{3t^2-2}\right)}{3t^2-2} \\ &= \frac{\left(\dfrac{4(3t^2-2)-(4t)(6t)}{(3t^2-2)^2}\right)}{3t^2-2} \\ &= \frac{-12t^2-8}{(3t^2-2)^3} \end{aligned}$$

Quando $x = 0,\ y = 2 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2}$, Logo

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pm\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} < 0$$

Portanto a concavidade é voltada para baixo on ponto (0,2).

2.5 Exercícios

[1] Calcule as expressões das derivadas e os seus respectivos valores nos pontos dados:

(1.1) $\begin{cases} x = \text{ sen } \; t \\ y = \text{ sen } \; 2t \end{cases}$, $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{dy}{dx}$, no ponto $t = \dfrac{\pi}{6}$

(1.2) $\begin{cases} x = 6t(1+t^2)^{-1} \\ y = 6t^2(1+t^2)^{-1} \end{cases}$, $0 \le t \le 1$, $\dfrac{dy}{dx}$, no ponto de abscissa $\dfrac{12}{5}$

(1.3) $\begin{cases} x = t + \text{ sen } (\frac{\pi}{2}t) \\ y = t + \ln t \end{cases}$, $t > 0$, $\dfrac{dy}{dx}$, no ponto $t = 8$

[2] Calcule $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ nos seguintes casos:

(2.1) $\begin{cases} x = \text{ sen } t \\ y = \text{ sen } 2t \end{cases}$ $, t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

(2.2) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$

[3] Verifique se:

(3.1) $\begin{cases} x = \text{ sec } (t) \\ y = \ln(\text{ cos } t) \end{cases}$ $, t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, satisfaz a equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} + e^y \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$

(3.2) $\begin{cases} x = \text{ arcsen}(t) \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$ $, t \in [-1, 1]$, satisfaz a equação $\text{ sen } x \cdot \dfrac{d^2y}{dx^2} + y \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$

[4] Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da curva C, no ponto de abscissa $x_0 = -\dfrac{1}{4}$, sendo C, definida parametricamente pelas equações

$$\begin{cases} x = 2 \text{ cos }^3 t \\ y = 2 \text{ sen }^3 t \end{cases} , \; t \in [0, \pi].$$

[5] Determine as equações das retas tangentes e normal ao gráfico da curva C, no ponto com $t = 1$, sendo C, definida parametricamente pelas equações

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \text{ arctg}(t) \end{cases} .$$

2.6 Área de curvas paramétricas

Determinamos a área sobre uma curva dado por equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (*)$$

tais que

$$t_1 \neq t_2 \Rightarrow (x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$$

(não queremos repetir trechos da curva).

Recordamos que a área sob uma curva $y = F(x)$ de $a \leq x \leq b$ é

$$A = \int_a^b F(x)\, dx, \quad (**) \text{ onde } F(x) \geq 0.$$

Usando a equação paramétrica $(*)$ como uma mudança na integral definida $(**)$,

- Vamos supor que quando $x = a,\ t = \alpha$ (ou seja $f(\alpha) = a$) e quando $x = b,\ t = \beta$ (ou seja $f(\beta) = b$.)
- $dx = f'(t)\, dt$
- $y = F(x) = F(f(t)) = g(t)$

Substituindo em $(**)$, temos que área é

$$\boxed{A = \int_\alpha^\beta g(t) f'(t)\, dt.}$$

Exemplo **2.16.** *Determine a área por baixo da ciclóide* $\begin{cases} x = 6(t - \operatorname{sen} t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

Solução

Observe que não há trechos repetidos. Logo

$$\begin{aligned} A = \int_0^{2\pi} y(t)\cdot\frac{dx}{dt}\,dt &= \int_0^{2\pi} 6(1-\cos t)\cdot 6(1-\cos t)\,dt \\ &= 36\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt \\ &= 36\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\,dt \\ &= 18\int_0^{2\pi}(3-4\cos t+\cos 2t)\,dt \\ &= 18\left[3t-4\,\text{sen}\,t+\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2t\right]_0^{2\pi} \\ &= 108\pi. \end{aligned}$$

Exemplo **2.17.** *Calcular a área da região do plano limitada pelo laço da curva C de equações paramétricas* $\begin{cases} x = -\dfrac{t^3}{3}+t \\ y = t^2-1 \end{cases}$ $(*)$

Solução

- Estudo de crescimento e decrescimento de x e y :

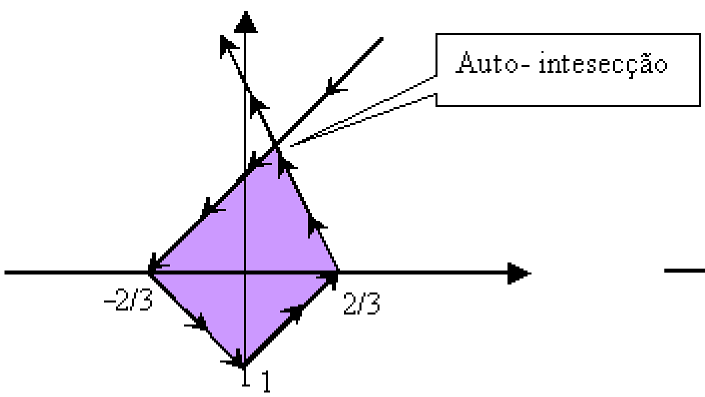
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -t^2+1 \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 2t \end{cases}$$

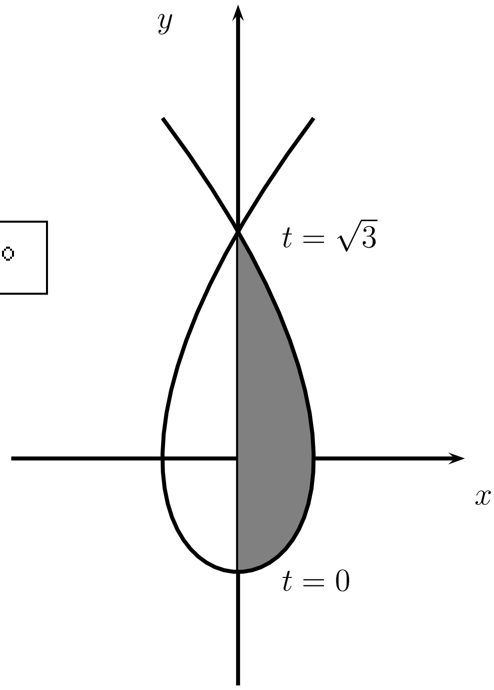
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \\ \\ \dfrac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-2}{3} \\ y=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=0 \end{cases} \end{cases}$$

t		-1		0		1	
sinal de $\frac{dx}{dt}$	$- - - - -$		$+ + + + + + + + +$		$+ + + + + + +$		$- - - - - - -$
crescimento de x	descrescente		crescente		crescente		descrescente

t		-1		0		1	
sinal de $\frac{dy}{dt}$	$- - - - -$		$- - - - - - -$		$+ + + + + + +$		$+ + + + + +$
crescimento de y	descrescente		descrescente		crescente		crescente

Usando apenas estas informações temos a seguinte representação gráfica para a curva (fig.1) e no (fig. 2) apresenta esta curva de forma mais exata.





É preciso calcular o ponto de auto-interseção da curva, que é um ponto por onde o móvel passa duas vezes)ou sejam em dois instantes diferentes).

Logo, sejam $t_1 < t_2$ tais que $x(t_1) = x(t_2)$ e $y(t_1) = y(t_2)$.

$$y(t_1) = y(t_2) \Rightarrow (t_1)^2 - 1 = (t_2)^2 - 1 \Rightarrow t_1 = \pm t_2 \Rightarrow t_1 = -t_2.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x(t_1) = x(t_2) \\ \text{e} \\ t_1 = -t_2 \end{array} \right. \Rightarrow -\frac{(t_2)^3}{3} - t_2 = -\frac{(t_2)^3}{3} + t_2 \Rightarrow -\frac{(t_2)^3}{3} - t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 0 \text{ ou } t_2 = \pm\sqrt{3}$$

$t_2 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2$ (não serve!). Então $t_1 = -\sqrt{3}$ e $t_2 = \sqrt{3}$. Temos,

$$t = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

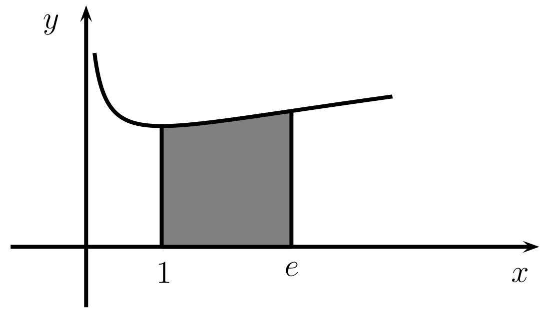
Pela maneira como a curva é descrita pelas equações, vemos que não há repetição de trechos. Logo,

$$\begin{aligned}
A &= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} x(t)\frac{dy}{dt}\, dt \\
&= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \left(-\frac{t^3}{3} + t\right) \cdot 2t\, dt \\
&= 4 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \left(-\frac{t^4}{3} + t^2\right)\, dt \\
&= 4\left[-\frac{t^5}{15} + \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= 4\left[\frac{-9\sqrt{3}}{15} + \frac{3\sqrt{3}}{3}\right] \\
&= \frac{8\sqrt{3}}{5}
\end{aligned}$$

2.7 Exercícios

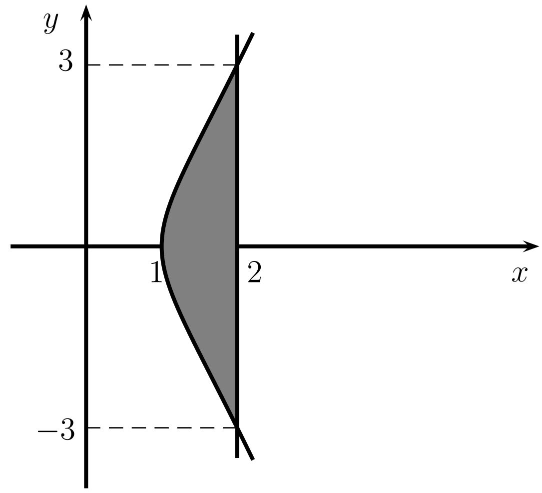
[1] Determine a área limitada:

(1.1) pelo eixo Ox, $x = 1$, $x = e$ e a curva de equações paramétricas $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = 2 + t^2 \end{cases}$

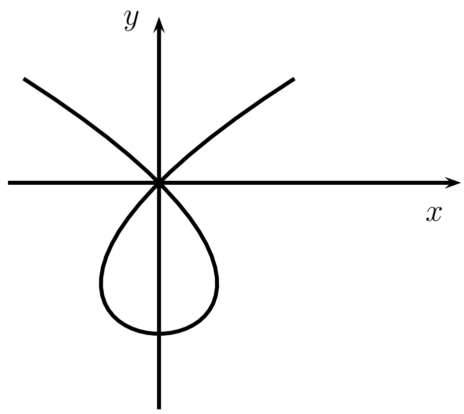


(1.2) pelas curvas de equações $x = 2$ e

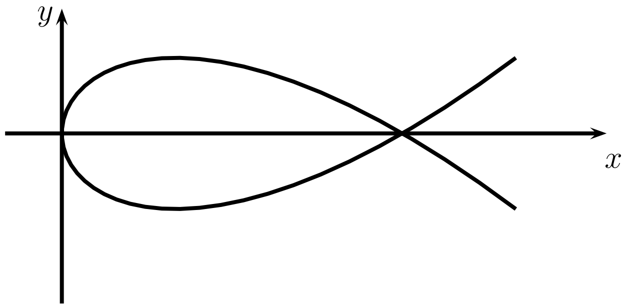
$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$$



(1.3) pelo laço de curva $\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$



(1.4) pelo laço de curva $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$



[2] Seja R a região do plano acima da reta $y = 2$ e abaixo do arco daciclóide de equações

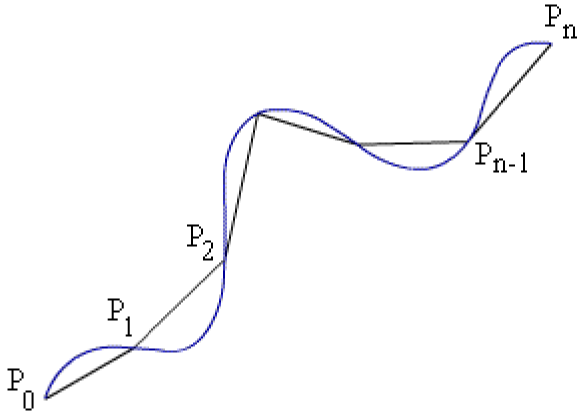
$$\begin{cases} x(t) = 2(t - \operatorname{sen} t) \\ y(t) = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Esboce R e calcule a sua área.

2.8 Comprimentos de curvas paramétricas

Dedução da fórmula para comprimentos de arcos

Seja uma curva dada por equações paramétricas contínuas



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

tais que

$$t_1 \neq t_2 \Rightarrow (x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$$

(não queremos repetir trechos da curva)

Vamos determinar (ou melhor, definir) o comprimento L da curva:

Tomemos números $t_0, t_1, \cdots, t_n$ tais que $a = t_0 < t_1 < \cdots t_{i-1} < t_i < \cdots t_n = b$ e pontos sobre a curva $P_i = (x(t_i), y(t_i))$, para $i = 1, \cdots, n$.

O comprimento da linha poligonal $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \cdots, \overline{P_{i-1}P_i}, \cdots, \overline{P_{n-1}P_n}$ é uma estimativa para L, e tomando-se pontos P_i cada vez mais próximo uns dos outros espera-se que este comprimento se aproxime cada vez mais de L. Isto é, indicado a distância entre P_{i-1} e P_i por $d(P_{i-1}, P_i)$ temos

$$L \approxeq d(P_0, P_1) + d(P_1, P_2) + \cdots + d(P_{n-1}, P_n)$$

Da geometria analítica temos,

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (x(t_i) - x(t_{i-1}))^2}$$

Supondo que cada uma das funções $y(t)$ e $x(t)$ tenha derivada contínua, pelo teorema do valor médio para derivadas, em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ existem $\alpha_i, \beta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tais que

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\alpha_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \quad \text{e} \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\beta_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Indicando $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ temos

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(y'(\beta_i))^2 + (x'(\beta_i))^2}\Delta t_i$$

Então,

$$L \approxeq \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(y'(\beta_i))^2 + (x'(\beta_i))^2}\Delta t_i \quad \text{e} \quad L = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \left(\sum_{i=0}^{n} \sqrt{(y'(\beta_i))^2 + (x'(\beta_i))^2}\Delta t_i \right)$$

Como $y'(t)$ e $x'(t)$ são contínuas,

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{(y'(t))^2 + (x'(t))^2}\, dt.}$$

2.3 Observação. *Se $v(t)$ é o vetor velocidade da curva parametrizada então $L = \displaystyle\int_a^b |v(t)|\, dt$. Isto é "a integral do módulo da velocidade é igual à distância percorrida".*

Exemplo **2.18.** *Use integral para calcular o comprimento do circulo de raio 4 e centro (1,2).*

Solução

Sejam as equações paramétricas do circulo

$$\begin{cases} x = 4\cos t + 1 \\ y = 4 \,\text{sen}\, t + 2 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Com estas equações não há repetição de trechos da curva

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-4\cdot\ \text{sen}\, t)^2 + (4\cos t)^2}\, dt = 4\int_0^{2\pi} \sqrt{\text{sen}\,^2 t + \ \cos\,^2 t}\, dt = 4\int_0^{2\pi} dt = 8\pi.$$

2.4 Observação. *O comprimento da elipse (que não seja círculo) não pode ser calculado de forma análoga pois para $a^2 \neq b^2$ a integral $\displaystyle\int \sqrt{a^2\,\text{sen}\,^2(t) + b^2\cos\,^2(t)}\, dt$ não pode ser representada usando funções elementares.*

Exemplo **2.19.** *Calcule o comprimento de arco da curva de equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Solução

Observe que há trechos repetidos pois

$$(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2)) \quad \forall t_1 \in [0, 1/2[\quad \text{e} \quad \forall t_2 \in]1/2, 1].$$

Logo o comprimento

$$L = \int_0^{1/2} \sqrt{(1-2t)^2 + (0)^2}\ dt = \int_0^{1/2} |1-2t|\ dt = \int_0^{1/2} (1-2t)\ dt = \frac{1}{4}.$$

Exemplo **2.20.** *Esboce e calcule o comprimento de arco de equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = 2(\cos t - 1) \\ y = 2(t + \operatorname{sen} t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Solução

- Estudo de crescimento e decrescimento de x e y :

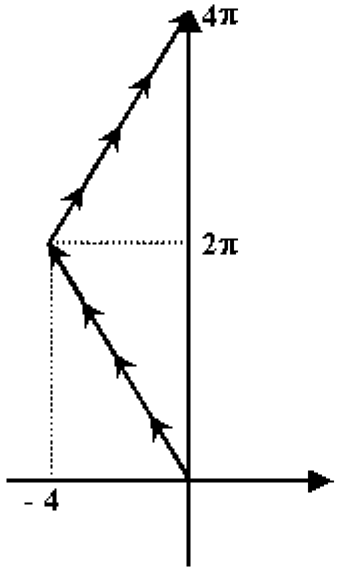
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2 \operatorname{sen} t \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 2(1 + \cos t) \end{cases}$$

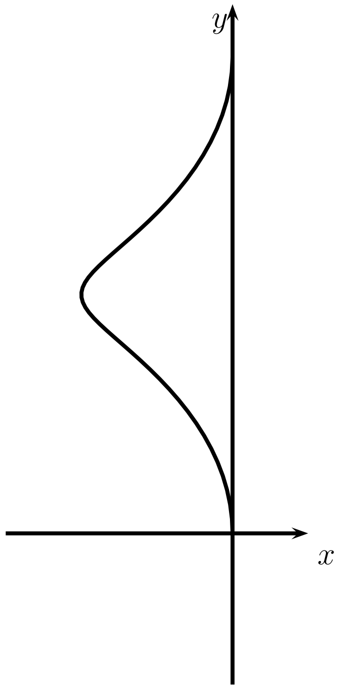
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow t = \pi \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2\pi \end{cases} \quad \text{ou} \quad t = 2\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4\pi \end{cases} \end{cases}$$

sinal de $\frac{dx}{dt}$		$- - - - - - - - -$		$+ + + + + + +$		
crescimento de x	0	descrescente	π	crescente	2π	t

sinal de $\frac{dy}{dt}$		$+ + + + + +$		$+ + + + + + +$		
crescimento de y	0	crescente	π	crescente	2π	t

Usando apenas estas informações temos a seguinte representação gráfica para a curva (fig.1) e no (fig. 2) apresenta esta curva de forma mais exata.





Pela maneira como a curva é descrita pelas equações, vemos que não há repetição de trechos. Logo,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2 \text{ sen } t)^2 + (2(1 + \cos t))^2}\, dt = \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\text{sen }^2 t + 1 + 2\cos t + \cos^2 t}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos t}\, dt \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t}\, dt \end{aligned}$$

Usando a fórmula $\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{1+\cos t}{2}$. Temos

$$L = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2cos^2(t/2)}\,dt = 4\int_0^{2\pi}|\cos(t/2)|\,dt$$

Então de acordo com o sinal de $\cos(t/2)$,

$$L = 4\left(\int_0^{\pi}\cos(t/2)\,dt - \int_{\pi}^{2\pi}\cos(t/2)\,dt\right) = 8\,[\,\text{sen}\,(t/2)]_0^{\pi} - 8\,[\,\text{sen}\,(t/2)]_{\pi}^{2\pi} = 16.$$

Exemplo **2.21.** *Esboce a curva e calcule o comprimento de arco do laço da curva de equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = t^2+1 \\ y = \dfrac{t^3}{3} - t + 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Solução

- Estudo de crescimento e decrescimento de x e y :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2t \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = t^2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases} \quad \text{ou} \quad t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

sinal de $\frac{dx}{dt}$	$- - - - -$		$- - - - - - - - -$		$+ + + + + +$		$+ + + + +$	
crescimento de x	descrescente	-1	descrescente	0	crescente	1	crescente	t

sinal de $\frac{dy}{dt}$	$+ + + + +$		$- - - - - -$		$- - - - - -$		$+ + + + +$	
crescimento de y	crescente	-1	descrescente	0	descrescente	1	crescente	t

- Calculando a auto-interseção:

  Sejam $t_1 < t_2$ tais que $x(t_1) = x(t_2)$ e $y(t_1) = y(t_2)$.

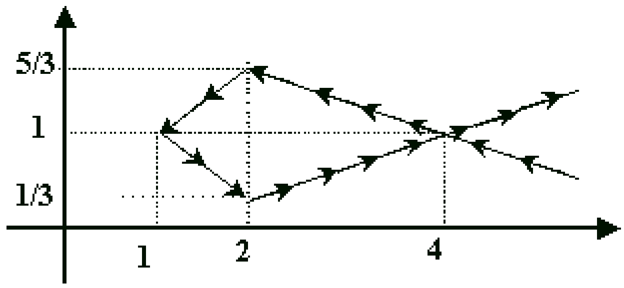
$$x(t_1) = x(t_2) \Rightarrow (t_1)^2 + 1 = (t_2)^2 + 1 \Rightarrow t_1 = \pm t_2 \Rightarrow t_1 = -t_2.$$

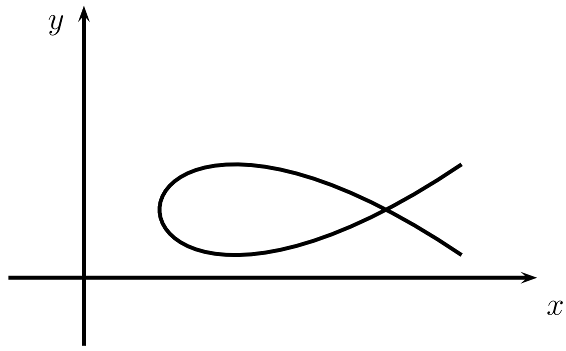
$$\begin{cases} y(t_1) = y(t_2) \\ \quad\text{e} \\ t_1 = -t_2 \end{cases} \Rightarrow -\frac{(t_2)^3}{3} + t_2 + 1 = \frac{(t_2)^3}{3} - t_2 + 1 \Rightarrow -\frac{(t_2)^3}{3} + t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 0 \text{ ou } t_2 = \pm\sqrt{3}$$

$t_2 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2$ (não serve!). Então $t_1 = -\sqrt{3}$ e $t_2 = \sqrt{3}$. Temos,

$$t = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Esboçando a curva com estas informações temos a seguinte representação gráfica para a curva (fig.1) e no (fig. 2) apresenta esta curva de forma mais exata.





Calculando o comprimento do laço

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (t^2-1)^2}\ dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}\ dt \\
&= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(t^2+1)^2}\ dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |t^2+1| dt
\end{aligned}
$$

Como $t^2 + 1$ é positivo para todo t,

$$L = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^2+1)\ dt = \left[\frac{t^3}{3} + t\right] = 4\sqrt{3}.$$

Exemplo **2.22.** *As equações paramétricas a seguir dão a posição de uma partícula em cada instante t, durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq \pi$.*

$$\begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \operatorname{sen}^2(t) \end{cases} \qquad (*)$$

a) Calcule a distancia total percorrida pela partícula.

b) Verifique se há trechos da trajetória que são repetidos durante o movimento.

c) Esboce a trajetória e calcule seu comprimento.

Solução

a) Basta aplicar a fórmula do comprimento de arco no intervalo $0 \leq t \leq \pi$ (se houver repetição de algum trecho, deve ser contabilizada).

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2 \text{ sen } (2t) = -4 \text{ sen } (t) \cos (t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (**) \\ \dfrac{dy}{dt} = 2 \text{ sen } (t) \cos (t) \end{cases}$$

$$D = \int_0^{\pi} \sqrt{16 \text{ sen }^2(t) \cos^2(t) + 4 \text{ sen }^2(t) \cos^2(t)}\; dt = \sqrt{5} \int_0^{\pi} |\text{ sen } (2t)|\; dt =$$

De acordo com o sinal de sen $(2t)$, temos

$$D = \sqrt{5} \int_0^{\pi} |\text{ sen } (2t)|\; dt = \sqrt{5} \left(\int_0^{\pi/2} \text{ sen } (2t)\; dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \text{ sen } (2t)\; dt \right) = 2\sqrt{5}.$$

b) Vamos determinar valores de t tais que $t_1 < t_2$ e $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$:

Das equações $(*)$ temos,

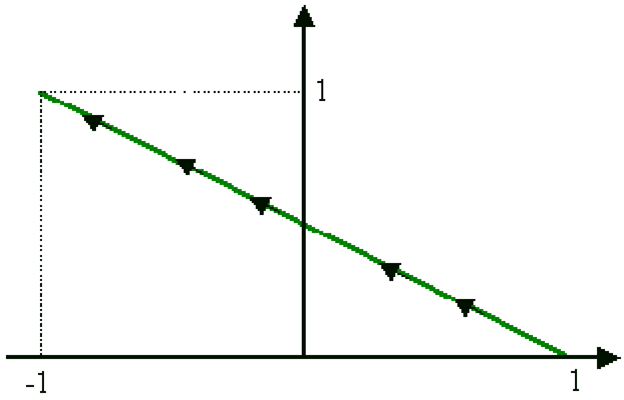
$$\begin{cases} \text{sen }^2(t_1) = \text{ sen }^2(t_2) \\ \text{com} \\ t_1 < t_2 \text{ e } t_1, t_2 \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen } (t_1) = \text{ sen } (t_2) \\ \text{com} \\ t_1 < t_2 \text{ e } t_1, t_2 \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow t_2 = \pi - t_1 \text{ com } t_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos (2t_2) = \cos (2\pi - 2t_1) = \cos (-2t_1) = \cos (2t_1)$$

Então nos instantes t_2 e t_1 tais que $t_1 \in [0, \pi/2]$ e $t_2 = \pi - t_1$, a partícula ocupa a mesma posição. Concluímos que após $t = \pi/2$ a partícula repete (retorna) a mesma trajetória descrita até este instante.

c) De acordo com b) só precisamos trabalhar com $t \in [0, \pi/2]$. Com as equações $(*)$ temos

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} ; \quad t = \pi/2 \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$



Esta trajetória é de fato um segmento da reta $y = (1 - 2x)/2$ (tente verificar!)

De acordo com o que foi discutido antes, o comprimento da trajetória é igual à metade da distância percorrida pela partícula, ou seja, $L = \dfrac{D}{2} = \sqrt{5}$.

2.9 Exercícios

[1] Calcule os comprimentos das curvas descritas abaixo:

(1.1) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

(1.2) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \ln t \end{cases}, 1 \leq t \leq 2$

(1.3) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\mathrm{sen}^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi,\ a > 0$

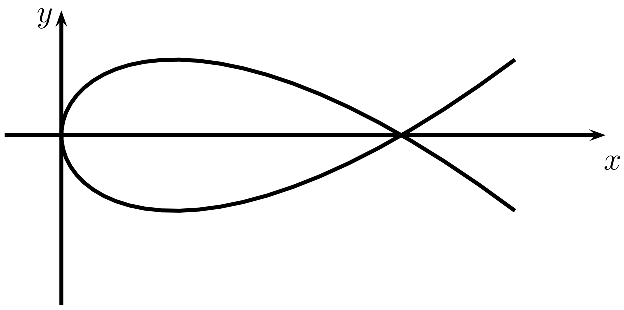
(1.4) $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = 0 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$

(1.5) $\begin{cases} x = a(t - \mathrm{sen}\, t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

(1.6) $\begin{cases} x = e^t\,\mathrm{sen}\, t \\ y = e^t \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

[2] As equações $\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$ dão a posição (x, y) de uma partícula no instante t. Determine a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 5$.

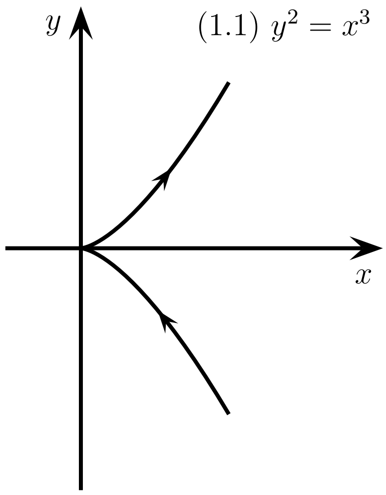
[3] Determine o comprimento de arco do laço de curva $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$

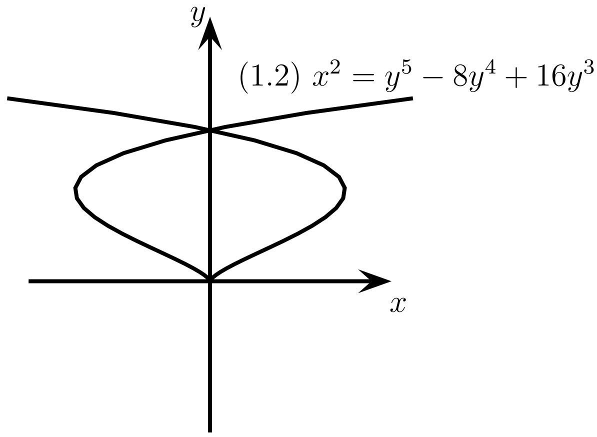


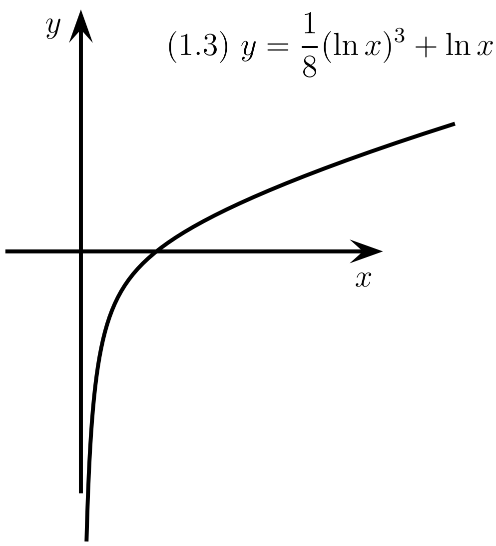
2.10 Respostas dos Exercícios Propostos

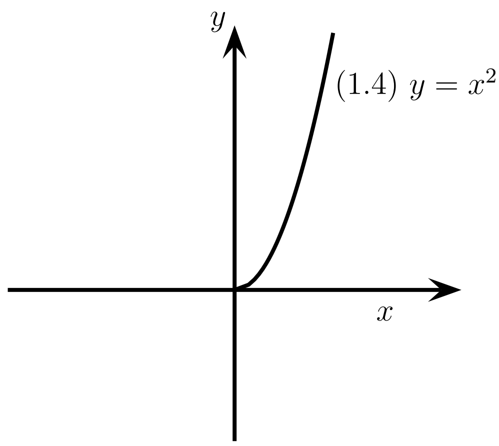
- **Construção de gráficos de curvas paramétricas (página 84)**

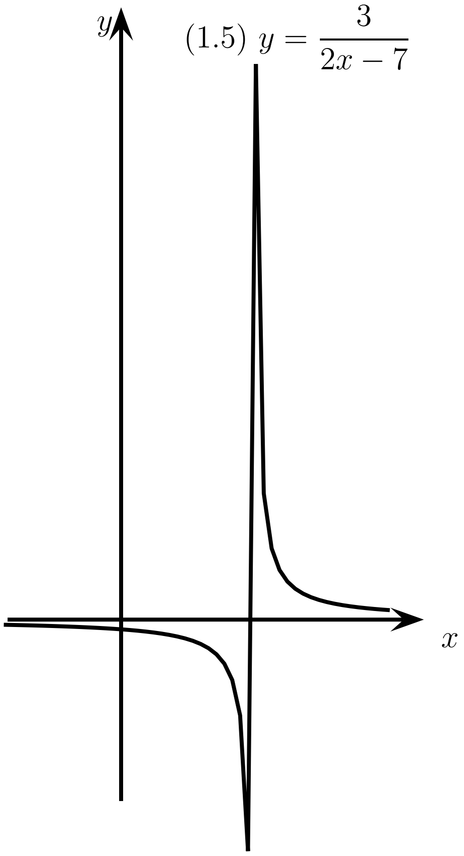
[1]

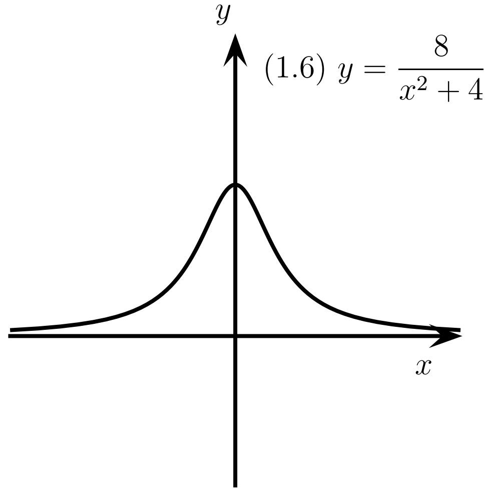


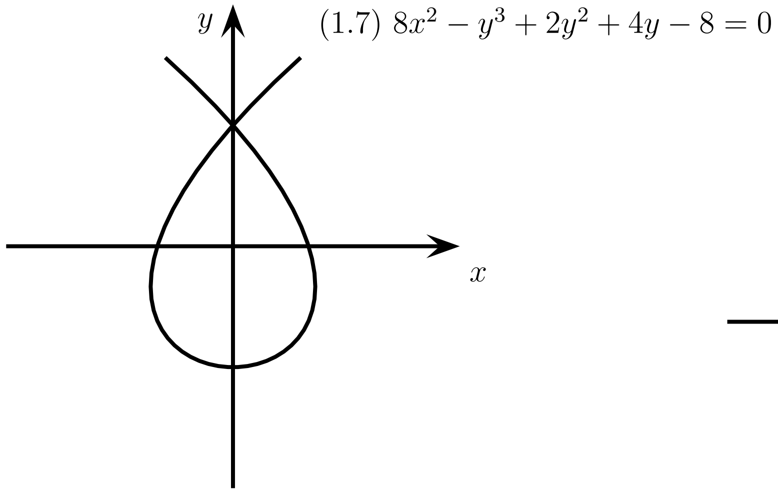


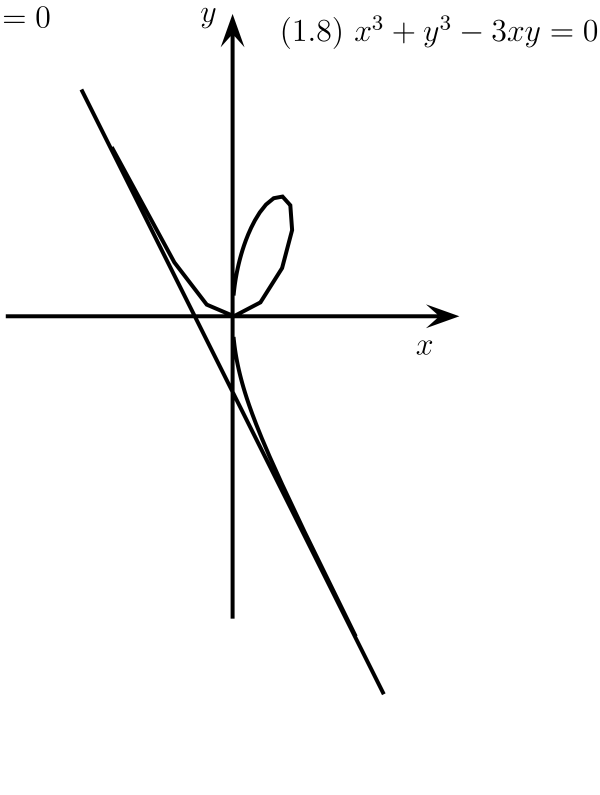





y
(1.5) $y = \dfrac{3}{2x-7}$
x


y
(1.6) $y = \dfrac{8}{x^2+4}$
x


y
(1.7) $8x^2 - y^3 + 2y^2 + 4y - 8 = 0$
x


y
(1.8) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$
x

- **Reta tangentes de curvas paramétricas (página 88)**

$$[1]\begin{cases} (1.1)\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2cos(2t)}{cos(t)}, \quad \dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \\ (1.2)\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t}{1-t^2};\ \text{para } x = \dfrac{12}{5},\ \text{temos } t = \dfrac{1}{2},\ \text{logo } \dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3} \\ \\ (1.3)\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+t}{t}\cdot\dfrac{1}{1+(\pi/2)cos(\frac{\pi}{2}t)}, \quad \dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=8} = \dfrac{9}{8+4\pi} \end{cases}$$

$$[2]\left\{\ (2.1)\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2\cos(2t).\,\text{sen}\,(t) - 4.\,\text{sen}\,(2t).\cos(t)}{\cos^3(t)} \qquad (2.2)\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = 12e^{5t}\right.$$

[4] $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

$$[5]\begin{cases} \text{Reta Tangente: } y - (1+\frac{\pi}{2}) = 2(x-1) \\ \text{Reta Normal: } y - (1+\frac{\pi}{2}) = -1\dfrac{1}{2}(x-1) \end{cases}$$

- **Área de curvas paramétricas (página 93)**

$$[1]\left\{\ (1.1)\ \dfrac{9e-10}{4}\ \text{u.a} \qquad (1.2)\ \dfrac{52}{15}\ \text{u.a} \qquad (1.3)\ \dfrac{8}{15}\ \text{u.a} \qquad (1.4)\ \dfrac{8\sqrt{3}}{5}\ \text{u.a}\right.$$

[2] $(2\pi + 8)$ u.a

- **Comprimento de arcos (página 104)**

$$[1]\begin{cases} (1.1)\ 4\pi\ \text{u.c} \qquad (1.2)\ \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \ln\left|\dfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right|\ \text{u.c} \qquad (1.3)\ 6a\ \text{u.c} \\ \\ (1.4)\ \dfrac{1}{4}\ \text{u.c} \qquad (1.5)\ 8a\ \text{u.c} \qquad (1.6)\ \sqrt{2}(e^{\pi/2}-1)\ \text{u.c} \end{cases}$$

[2] $10\sqrt{26} + 2\ln(5+\sqrt{26})$ u.c [3] $4\sqrt{3}$ u.c