4.12 Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

Definição **4.12.1.** *Seja $z = f(x, y)$ definida num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$.*

(1) Um ponto (x_0, y_0) é um ponto de **mínimo local** *de f se existe uma bola B com centro (x_0, y_0), tal que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo $(x, y) \in B$.*

(2) Um ponto (x_0, y_0) é um ponto de **máximo local** *de f se existe uma bola B com centro (x_0, y_0), tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ para todo $(x, y) \in B$.*

Em ambos os casos, (x_0, y_0) é dito **extremo relativo ou local** *de f e $f(x_0, y_0)$ é dito* **valor extremo de** *f.*

Exemplo **4.12.1.** *Se $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ então $(0, 0)$ é ponto de mínimo local de f.*
De fato, $x^2 + y^2 \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
$0 = f(0, 0) \leq f(x, y) = x^2 + y^2,$ *para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*
E o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$.

Teorema **4.12.2.** *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no aberto U e $(x_0, y_0) \in U$ um ponto extremo local de f. Então*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Definição **4.12.3.** *Seja $z = f(x, y)$ definida num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Um ponto (x_0, y_0) é um ponto crítico de f se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ são iguais a zero ou se f não é diferenciável em (x_0, y_0) .*

Geometricamente, um ponto é ponto crítico de uma função num ponto quando o gráfico da função nesse ponto não tem plano tangente ou o plano tangente é horizontal.

Os pontos de extremos locais (máximos ou mínimos) são portanto pontos críticos. Um ponto crítico que não é máximo local nem mínimo local é chamado de **ponto de sela.**

Teorema 4.12.4. *Seja $z = f(x, y)$ uma função cujas derivadas parciais de 1^a e 2^a ordem são contínuas (f é de classe C^2) num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in U$ um ponto crítico de f.*

Denotamos por $H(x_0, y_0)$ o determinante da matriz Hessiana de f no ponto (x_0, y_0)

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

Então

(a) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) é ponto de mínimo local de f.

(b) Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) é ponto de máximo local de f.

(c) Se $H(x_0, y_0) < 0$ então (x_0, y_0) é ponto de sela de f.

(d) Se $H(x_0, y_0) = 0$ nada podemos afirmar: f pode ter um máximo local ou mínimo local ou um ponto de sela em (x_0, y_0).

Observação 4.12.5. *Note que se $H(x_0, y_0) > 0$ então ambos $f_{xx}(x_0, y_0)$ e $f_{yy}(x_0, y_0)$ deve ter o mesmo sinal, logo em (a) e (b) podemos substituir $f_{xx}(x_0, y_0)$ por $f_{yy}(x_0, y_0)$.*

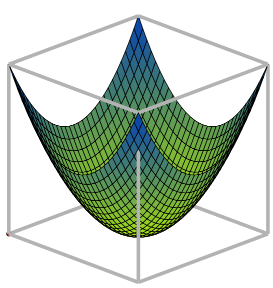

Figura 4.1: mínimo

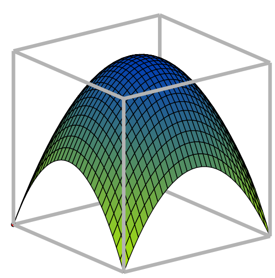

Figura 4.2: máximo

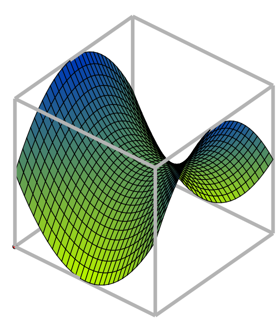

Figura 4.3: sela

Exemplo 4.12.2. *Classifique os pontos críticos de* $f(x,y) = 15xy^2 - 4x^3 + 15y^3 + 48x - 6$.

Exemplo 4.12.3. *Classifique os pontos críticos de* $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$.

4.13 Multiplicadores de Lagrange

Em muitas aplicações práticas da maximização e da minimização, o problema consiste em maximizar ou minimizar, uma dada função sujeita a certas condições laterais ou restrições sobre as variáveis envolvidas.

4.14 Exercícios