4.5 Derivadas parciais

Definições e Exemplos

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definição **4.5.1.** **i)** *A* ***derivada parcial de*** f ***em relação à variável*** x, ***no ponto*** $(x_0, y_0) \in D$ *é denotada por* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ *(ou por* $f_x(x_0, y_0)$*) e definida por:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \text{ se o limite existe.}$$

i) *A* ***derivada parcial de*** f ***em relação à variável*** y, ***no ponto*** $(x_0, y_0) \in D$ *é denotada por* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ *(ou por* $f_y(x_0, y_0)$*) e definida por:*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}, \text{ se o limite existe.}$$

De forma análoga são definidas as derivadas parciais para funções de três variáveis.

Exemplo **4.5.1.** *Seja* $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ *. Calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Solução

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1.$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{-h^2}{h^2} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{h}$ que não existe pois $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1}{h} = +\infty$ e $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{1}{h} = -\infty$ ■

Exemplo **4.5.2.** *Seja* $f(x, y) = 2xy - 3y^2$. *Calcule suas derivadas parciais.*

Solução

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left(2(x + h)y - 3y^2\right) - (2xy - 3y^2)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xy + 2hy - 3y^2 - 2xy + 3y^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hy}{h} = 2y.$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(2x(y+h)-3(y+h)^2\right)-(2xy-3y^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xy+2xh-3y^2+6yh-3h^2-2xy+3y^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+6yh-3h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+6y-3h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+6y-3h) = 2x+6y. \qquad \blacksquare$$

Observação 4.5.2. *1) Fixado y_0, podemos considerar a função g de uma variável dada por $g(x) = f(x,y_0)$; logo*

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).$$

De modo análogo se $h(y) = f(x_0,y)$, então, $h'(y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

2) Conseqüentemente, na prática, para calcularmos a derivada parcial de uma função de várias variáveis em relação a uma de suas variáveis, consideramos todas as outras variáveis como constantes e derivamos em relação aquela variável.

3) Assim, todas as regras de derivação estudadas para funções em $\mathbb{R}$ em Cálculo A podem ser aplicadas.

Exemplo 4.5.3. *i) Se $z = f(x,y) = \text{ sen } (x^2+xy)+y$, calcule suas derivadas parciais.*

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x^2+xy)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy) = (2x+y)\cos(x^2+xy).$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(x^2+xy)+1.$$

ii) Se $z = f(x,y) = x\ln\left(\dfrac{x^2}{y-1}\right)+3y$, calcule suas derivadas parciais.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln\left(\frac{x^2}{y-1}\right) + x\cdot\frac{y-1}{x^2}\cdot\frac{2x}{y-1} = \ln\left(\frac{x^2}{y-1}\right)+2.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cdot\frac{y-1}{x^2}\cdot\left[\frac{-x^2}{(y-1)^2}\right]+3 = \frac{-x}{y-1}+3.$$

iii) Se $w = f(x,y,z) = e^{yx^2} + \text{ tg } (z)$, calcule suas derivadas parciais.

Solução

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy \cdot e^{yx^2}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 \cdot e^{yx^2}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \sec^2 z$.

iv) Se $z = f(x,y) = x^2\sqrt{[x^2 + y^2 \ln{(y^2+1)}]^{-5}}e^{\operatorname{tg}{(x^2y+y^3x^2)}}$ *calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

Solução

Seja

$$g(x) = f(x,0) = x^{-3}$$

Então

$$g'(x) = -3x^{-4}$$

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = g'(1) = -3.$$

v) Se $w = f(x,y,z) = \dfrac{\cos{(x+y+z)}}{\ln{(x^2+y^2+z^2)}}$ *calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\pi,0,0)$.

Solução

Seja

$$g(x) = f(x,0,0) = \frac{\cos x}{2\ln x}$$

Então

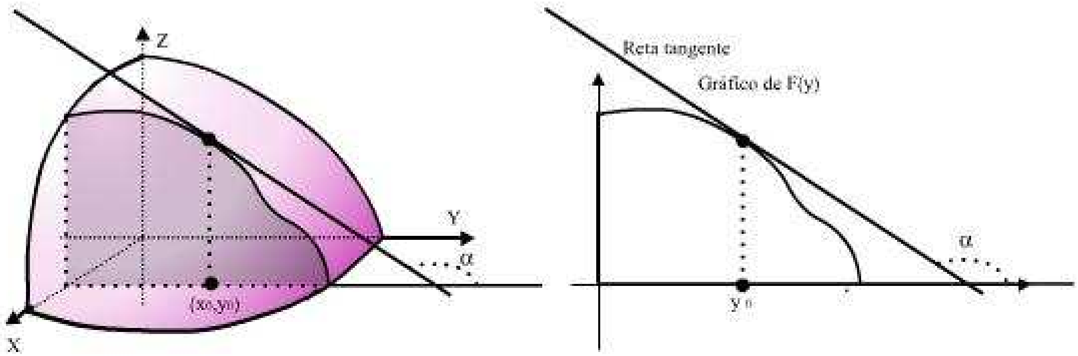
$$g'(x) = \frac{-x(\ln x)\operatorname{sen} x + \cos x}{2x(\ln x)^2}$$

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi,0,0) = g'(\pi) = \frac{1}{2\pi(\ln \pi)^2}.$$

■

4.5.1 Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais



4.6 Regra da Cadeia

4.7 Diferenciabilidade

4.8 Reta tangente e normal

4.9 Taxa de variação

4.10 Diferencias

4.11 Função Implícita